P 17

Propagation des ondes électromagnétiques

17.1 Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant ; onde plane progressive et aspects énergétiques.	• Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. • Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.

Pour que l'on soit en présence d'une onde électromagnétique, il faut que les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ vérifient les équations de Maxwell : c'est donc à faire théoriquement avant tout calcul en cas de doute.

17.2 Équations de propagation des champs en dehors des sources

Ce que l'on appelle "en dehors des sources" est un endroit de l'espace où n'existent aux instants considérés ni charges de densité volumique ρ, ni courants de densité volumique $\vec{j}$.

17.2.1 Équations de Maxwell dans le vide, en l'absence de charges et de courants

Comme nous venons de le signaler, on prendra $\boxed{\rho = 0 \text{ et } \vec{j} = \vec{0}}$.

Dans ce cas les équations de Maxwell s'écrivent :

Nom	équation
Maxwell-Gauss (M-G)	$div\ \vec{E} = 0$
Maxwell-Thomson (M-T)	$div\ \vec{B} = 0$
Maxwell-Faraday (M-F)	$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère (M-A)	$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \varepsilon_0\, \mu_0\, \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

TABLE 17.2 – Équations de Maxwell en dehors de sources

Le souci ici, c'est que les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère sont couplées : elles font intervenir à la fois $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Nous allons établir des équations aux dérivées partielles faisant intervenir uniquement $\vec{E}$ ou $\vec{B}$.

17.3 Équation de propagation (rappels)

— Principe —

Comme déjà vu dans un chapitre précédent, on utilise la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot} = \overrightarrow{grad}\,div - \vec{\Delta}}$$

17.3.1 Pour le champ électrique

Calculons $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = \overrightarrow{grad}\,div\ \vec{E} - \vec{\Delta}\ \vec{E}$:

- D'une part, comme $div\ \vec{E} = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\ \vec{E} &= \overrightarrow{grad}\,div\ \vec{E} - \vec{\Delta}\ \vec{E} \\ &= -\vec{\Delta}\ \vec{E}\end{aligned}$$

- D'autre part, l'équation de Maxwell-Faraday permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} &= \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right)\\ &= -\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

Les variables d'espace x, y et z sont indépendantes de la variable de temps t, ce qui permet de commuter les dérivées spatiale et temporelle. La combinaison avec l'équation de Maxwell-Ampère donne alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}\right)\\ &= -\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

L'équation de propagation pour le champ électrique s'écrit alors :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}}$$

17.3.2 Pour le champ magnétique

Calculons $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{grad}\,div\,\overrightarrow{B} - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{B}$:

- D'une part, comme $div\,\overrightarrow{B} = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} &= \overrightarrow{grad}\,div\,\overrightarrow{B} - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{B}\\ &= -\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{B}\end{aligned}$$

- D'autre part, l'équation de Maxwell-Ampère permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} &= \overrightarrow{rot}\left(\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)\\ &= \varepsilon_0\,\mu_0\,\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

Les variables d'espace x, y et z sont indépendantes de la variable de temps t, ce qui permet de commuter les dérivées spatiale et temporelle. La combinaison avec l'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} &= \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}\right)\\ &= \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

L'équation de propagation pour le champ magnétique s'écrit alors :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{B} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}}$$

17.3.3 Équation de d'Alembert

Les champs électrique et magnétique satisfont, dans le vide, en l'absence de charges et de courants, à l'équation de d'Alembert tridimensionnelle :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{X} - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

C'est une équation rencontrée fréquemment dans le domaine de la physique : électromagnétisme (ondes électromagnétiques), mécanique (cordes vibrantes), acoustique (tuyaux sonores), mécanique des fluide (phénomène de houle), électricité (lignes électriques), thermodynamique (transferts thermiques), ...

Lorsque, comme c'est le cas ici, $\overrightarrow{X}$ est un vecteur, le laplacien est également vectoriel. Si $\overrightarrow{X}$ est remplacé par X scalaire, le laplacien est également scalaire.

v est la vitesse de l'onde.

Ici $v = c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$ est également appelée célérité de la lumière dans le vide.

17.4 Structure de l'onde plane progressive monochromatique

17.4.1 Solution générale

On montre que la solution générale de cette équation, par exemple pour le champ électrique $\overrightarrow{E}$, s'écrit :

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = \sum_{(\overrightarrow{n})} \overrightarrow{E}_{\overrightarrow{n}} \left(t - \frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n}}{c}\right)$$

Les $\overrightarrow{E}_{(\overrightarrow{n})}$ sont des fonctions vectorielles a priori quelconques et la somme porte sur toutes les directions de l'espace.

On va en fait s'intéresser à une seule direction de propagation, donc à une onde plane.

17.4.2 Onde plane

On se limite ici à une seule direction définie par $\overrightarrow{n}$. La solution est alors de la forme :

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{E}_{(\overrightarrow{n})} \left(t - \frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n}}{c}\right) + \overrightarrow{E}_{(-\overrightarrow{n})} \left(t + \frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n}}{c}\right)$$

Si le système d'axes n'est pas imposé, on peut par exemple choisir $Ou = Oz$ et on a, en coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_z}$, ce qui donne :

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{E} \left(t - \frac{z}{c}\right) + \overrightarrow{E}' \left(t + \frac{z}{c}\right)$$

— Onde plane —

On dit qu'une onde, décrite par la fonction F, est plane si, à chaque instant, cette fonction F a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction fixe définie par un vecteur unitaire , c'est-à-dire, si F ne dépend que d'une seule coordonnée d'espace, z par exemple.

— Surface d'onde —

On appelle surfaces d'onde les surfaces pour lesquelles l'onde a la même phase à un instant donné t quelconque.
la phase est définie par :

$$\varphi = \omega\,t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} + \psi$$

Le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ est normal à ces surfaces.

Pour une onde plane, les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires à la direction de propagation.

17.4.3 Onde plane progressive

17.4.3.1 Description

Une onde plane peut être considérée comme la superposition de deux ondes planes se propageant dans la même direction, mais en sens opposés. Chacune de ces deux ondes est appelée *onde plane progressive* : elles se propagent chacune dans une seule direction et un seul sens.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

Une fonction F décrivant l'onde plane progressive a même valeur dans un plan $z = z_1$ observé à l'instant t_1 et dans un plan $z = z_2$ observé à l'instant t_2 à condition que :

$$t_1 - \frac{z_1}{c} = t_2 - \frac{z_2}{c}$$

Soit :

$$z_2 - z_1 = c\,(t_2 - t_1)$$

Ainsi, si on connaît la fonction en tout point à l'instant t_1, sa valeur en tout point à l'instant t_2 s'obtient en effectuant une translation de $z_2 - z_1 = c\,(t_2 - t_1)$. Ceci revient à dire que le phénomène s'est propagé en bloc le long de l'axe Oz.

La dépendance en $t - \frac{z}{c}$ (ou $z - c\,t$) traduit une onde plane se propageant suivant l'axe Oz positif à la vitesse (ou célérité) c :

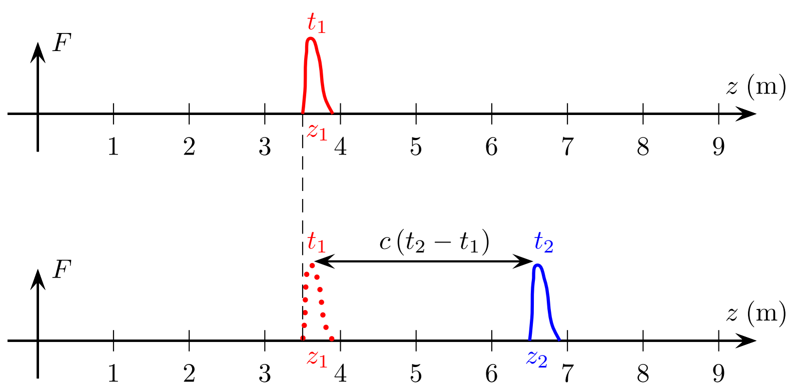

FIGURE 17.1 – Propagation d'un signal

Si l'on considère un signal comme un paquet d'ondes, c'est-à-dire formée d'une infinité d'ondes, une onde plane progressive correspond donc à une composante élémentaire d'un paquet d'ondes. C'est ce que l'on fait en électronique par exemple lorsque l'on considère un signal formé d'une infinité de signaux sinusoïdaux (cf. décomposition en série de Fourier) : le signal est en fait la superposition de signaux harmoniques.

17.4.3.2 Validité du modèle de l'onde plane

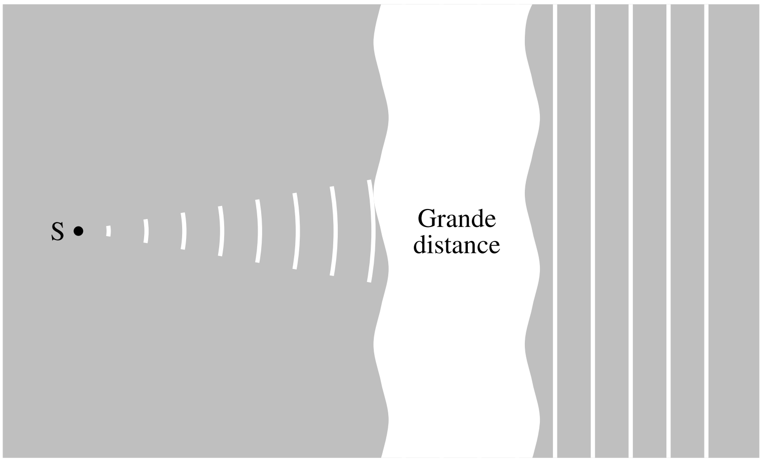

FIGURE 17.2 – Modèle de l'onde plane

Les surfaces d'onde peuvent être assimilées, loin de la source, à des plans.

> Le modèle de l'onde plane est donc valide à grande distance des sources.

17.4.3.3 Structure imposée à l'onde plane progressive par les équations de Maxwell

- La relation de Maxwell-Gauss $div\ \overrightarrow{E} = 0$, dans le cas où l'onde plane progressive (OPP) se propage dans la direction Oz, se réduit à :

  $$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

  Ce qui donne $\boxed{E_z = C^{te} \text{ (dépendant éventuellement du temps)}}$.
  Or, dans ce chapitre sur la propagation des ondes électromagnétiques, nous nous intéressons uniquement à des champs qui dépendent à la fois de l'espace et du temps. On obtient donc finalement :

  $$\boxed{E_z = 0}$$

  Cela signifie que le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est *transversal*.
- De même, la relation de Maxwell-Thomson $div\ \overrightarrow{B} = 0$ permet d'obtenir :

  $$\boxed{B_z = 0}$$

  Ainsi, le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est également *transversal*.
- La relation de Maxwell-Faraday s'écrit : $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$.
  Notons $\overrightarrow{n}$ le vecteur unitaire de la direction et suivant le sens de la propagation (ici $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_z}$). On a alors, en coordonnées cartésiennes :

  $$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} & = & -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} & = & -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{array}\right.$$

  E_z étant nul, le système se réduit à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z} & = & -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} & = & -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{array}\right.$$

Posons alors $u = t - \dfrac{z}{c}$. Cela entraîne :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{c} \; et \; \frac{\partial u}{\partial t} = 1$$

Avec $B_z = 0$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{c}\dfrac{dE_y}{du} & = & -\dfrac{dB_x}{du} \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{dE_x}{du} & = & \dfrac{dB_y}{du} \\ \dfrac{dE_y}{du} - \dfrac{dE_x}{du} & = & 0 \end{array}\right.$$

Calculons $\overrightarrow{n} \wedge \dfrac{d\overrightarrow{E}}{du}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} \wedge \frac{d\overrightarrow{E}}{du} &= \overrightarrow{e_z} \wedge \left(\frac{dE_x}{du}\overrightarrow{e_x} + \frac{dE_y}{du}\overrightarrow{e_y}\right) \\ &= \overrightarrow{e_z} \wedge c\left(\frac{dB_y}{du}\overrightarrow{e_x} - \frac{dB_x}{du}\overrightarrow{e_y}\right) \\ &= c\left(\frac{dB_x}{du}\overrightarrow{e_x} + \frac{dB_y}{du}\overrightarrow{e_y}\right) \\ &= c\,\frac{d\overrightarrow{B}}{du} \end{aligned}$$

Les constantes étant prises égales à 0, on obtient la relation, **valable pour une onde plane progressive** :

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{E}}{c}}$$

Les vecteurs $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ forment un **trièdre direct**.

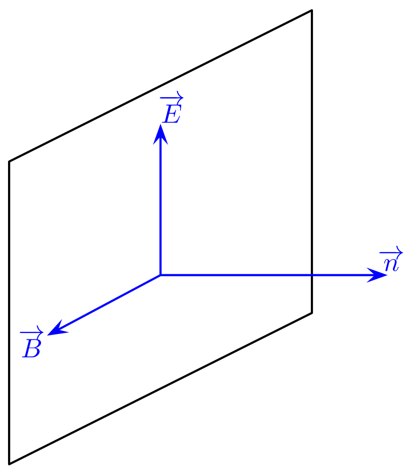

FIGURE 17.3 – Trièdre direct

17.4.4 Onde plane progressive monochromatique

17.4.4.1 Généralités

— Onde monochromatique —

Une onde plane progressive est monochromatique (ou harmonique) si la fonction qui la décrit est une fonction sinusoïdale de $t - \dfrac{z}{c}$.

Grâce à la décomposition de Fourier, on peut alors décomposer chacune des fonctions précédentes en somme de fonctions sinusoïdales, par exemple :

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{E}_0 \cos\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

ou

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{E}_0 \sin\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

— Remarque —

On pourra, à la place de $t - \dfrac{z}{c}$, prendre $z - c\,t$ ou encore comme on le verra plus tard, $\omega\,t - k\,z$ ou leur opposé.

Le champ étudié étant sinusoïdal, on peut alors considérer la fonction complexe :

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{K} \exp\left[i\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$$

et considérer le champ électrique comme la solution réelle de l'expression précédente :

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{K} \cos\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

En pratique, on utilise souvent :

$$\overrightarrow{E}_{(M)} = \overrightarrow{E}_0 \cos\left[\omega\,t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}\right]$$

avec $\overrightarrow{k} = k\,\overrightarrow{n}$ et $k = \dfrac{\omega}{c}$.

$\overrightarrow{k}$ est appelé vecteur d'onde. Ce vecteur est colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{n}$: il est donc dirigé dans le sens de la propagation de l'onde.

ω est la pulsation de l'onde.

17.4.4.2 Équation de dispersion

En prenant par exemple :

$$\overrightarrow{E}_{(M)} = \overrightarrow{E}_0 \cos\left[\omega\,t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}\right]$$

La dérivée seconde par rapport au temps de $\overrightarrow{E}$ s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\,\overrightarrow{E}_0 \cos\left(\omega\,t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}\right) = -\omega^2\,\overrightarrow{E}$$

De la même façon, le laplacien, qui est une dérivée seconde par rapport à l'espace s'écrit :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} = -k^2\,\overrightarrow{E}_0 \cos\left(\omega\,t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}\right) = -k^2\,\overrightarrow{E}$$

En utilisant l'équation de propagation $\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2\,\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$, on en déduit :

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

Soit, avec $k^2 = \|\overrightarrow{k}\|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$:

$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2}$$

Cette **relation de dispersion** est valable dans le vide.

17.4.4.3 Double périodicité

Dans le cas où l'onde électromagnétique se propage suivant l'axe Oz dans le sens des z croissants, le champ électrique peut s'écrire indifféremment :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k z) \qquad \text{ou} \qquad \vec{E}_0 \cos(k z - \omega t)$$

Dans les 2 cas, on voit apparaître une double périodicité :

- Une périodicité temporelle :
  Pour z fixé, le champ est périodique de période temporelle :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

- Une périodicité spatiale :
  Pour t fixé, le champ est périodique de période spatiale :

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

En utilisant $k = \dfrac{\omega}{c}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, on a :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = c T$$

On peut également introduire la fréquence ν ou F :

$$\nu = F = \frac{1}{T}$$

c est la vitesse ou célérité de l'onde électromagnétique.

> Les unités :
> T s'exprime en s, ω en $rad.s^{-1}$, ν ou F en Hz ou s^{-1}, λ en m et k en m^{-1}

Quelques ordres de grandeur de fréquence et longueur d'onde pour les ondes électromagnétiques :

(Longueurs d'onde croissantes vers la gauche)

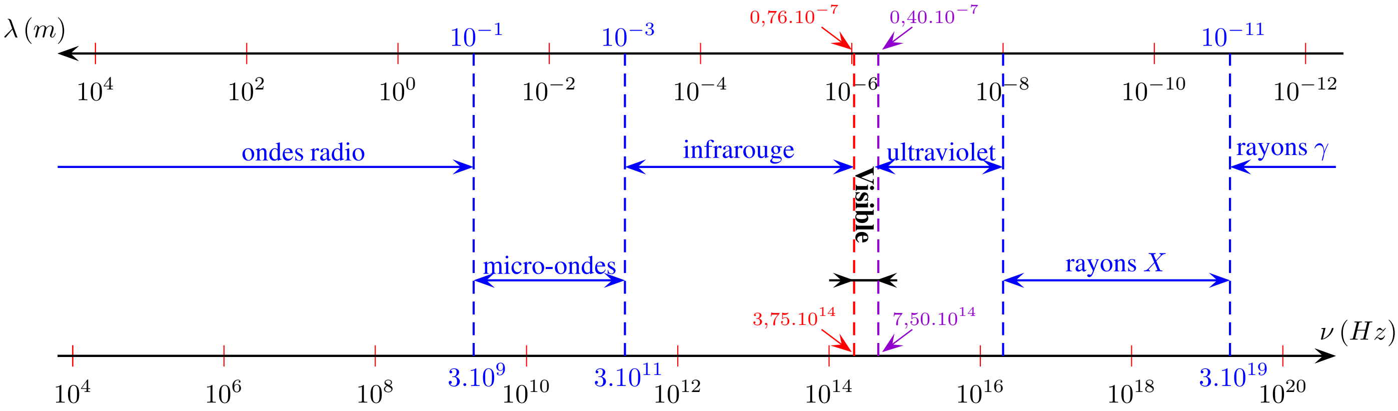

FIGURE 17.4 – Fréquences et longueurs d'onde des ondes électromagnétiques

ou bien, avec une autre représentation :

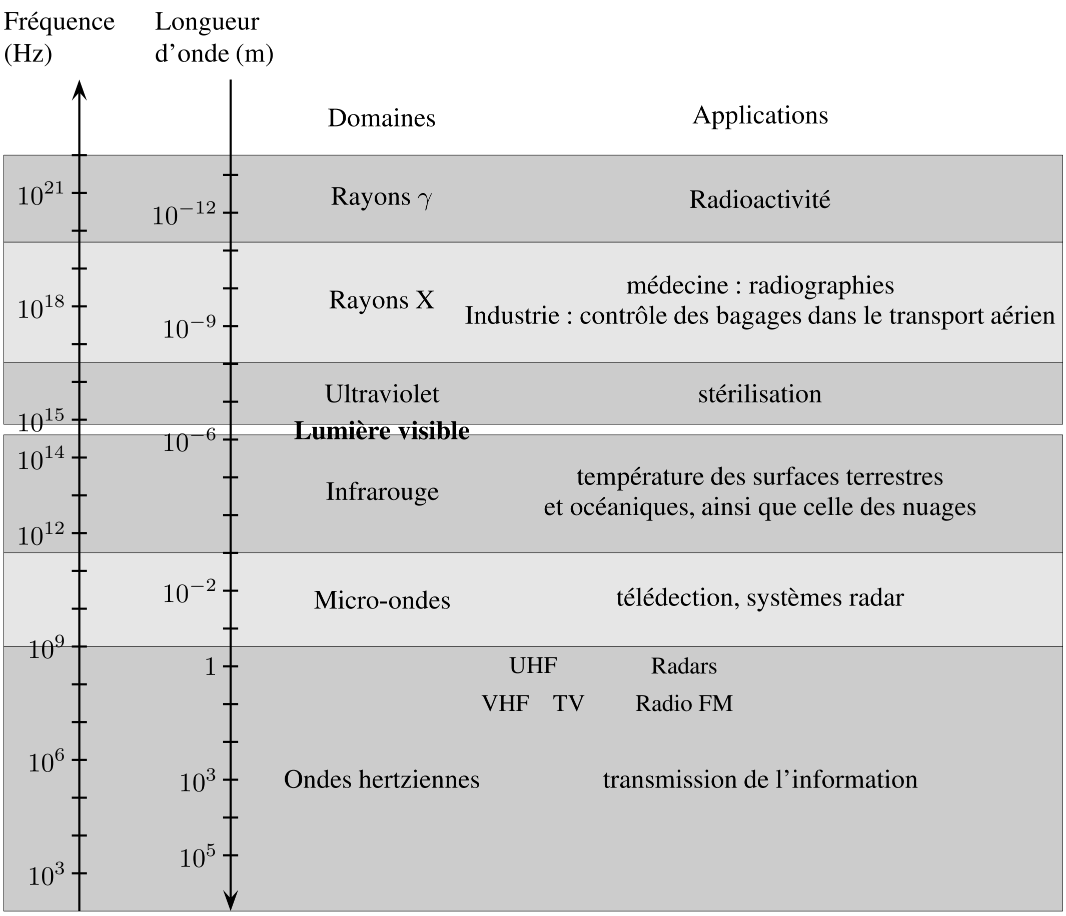

FIGURE 17.5 – Fréquences et longueurs d'onde des ondes électromagnétiques

Les couleurs du visible se situent environ entre $400\,nm$ et $760\,nm$ (soit entre 0,400 et 0,760 μm) :

(⚠ Longueurs d'onde croissantes vers la droite)

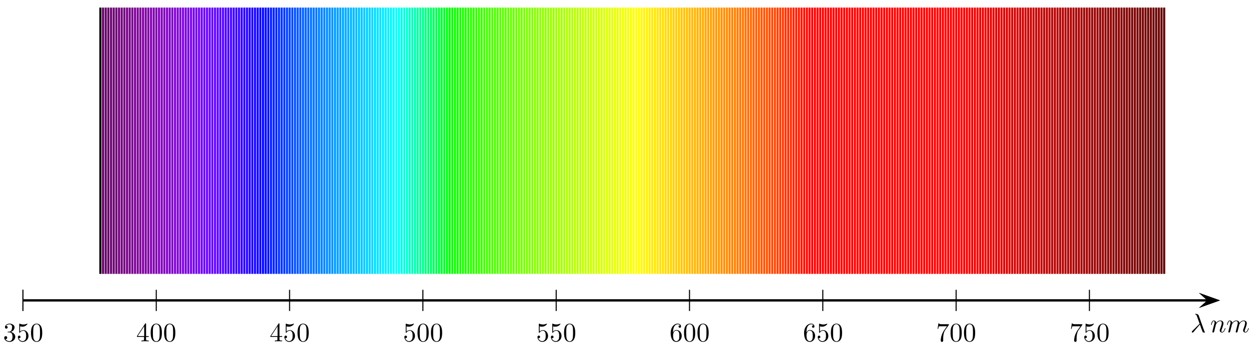

FIGURE 17.6 – Longueurs d'onde du visible

17.4.4.4 Vitesse de phase

La phase d'une onde électromagnétique est égale au terme $\omega\,t - k\,z$ éventuellement additionné d'une fonction de phase ψ_1 :

$$\varphi = \omega\,t - k\,z + \psi_1$$

2 points voisins ont même phase si la variation de phase $d\varphi$ est nulle entre ces deux points :

$$d\varphi = \omega\,dt - k\,dz = 0$$

On en déduit alors la vitesse de propagation de la phase dans le vide, appelée *vitesse de phase* :

$$v_\varphi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = c$$

17.4.4.5 Représentation complexe

Considérons par exemple une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propageant suivant l'axe Oz croissant.
Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ étant transversal, il s'écrit alors dans le cas le plus général :

$$\overrightarrow{E} \left| \begin{array}{ll} E_x & = E_{0x} \cos\left(\omega t - k z + \psi_x\right) \\ E_y & = E_{0y} \cos\left(\omega t - k z + \psi_y\right) \\ E_z & = 0 \end{array} \right.$$

où ψ_x et ψ_y représentent respectivement les fonctions de phase des composantes de $\overrightarrow{E}$ suivant x et y.
On peut alors écrire le champ électrique sous la forme :

$$\overrightarrow{E} \left| \begin{array}{ll} E_x & = \mathcal{R}e\left(E_{0x} \exp\left[i\left(\omega t - k z + \psi_x\right)\right]\right) \\ E_y & = \mathcal{R}e\left(E_{0y} \exp\left[i\left(\omega t - k z + \psi_y\right)\right]\right) \\ E_z & = 0 \end{array} \right.$$

En posant :

$$\underline{\overrightarrow{E}_0} = E_{0x} \exp\left(i \psi_x\right) \overrightarrow{e_x} + E_{0y} \exp\left(i \psi_y\right) \overrightarrow{e_y}$$

On a alors :

$$\overrightarrow{E} = \mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E}_0} \exp\left[i\left(\omega t - k z\right)\right]\right)$$

Le champ électrique peut ainsi s'exprimer par :

$$\overrightarrow{E} = \mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E}}\right) = \mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E}_0} \exp\left[i\left(\omega t - k z\right)\right]\right)$$

— Remarque —

Dans le cas général d'une onde plane progressive monochromatique de vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = k \overrightarrow{n}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{E} = \mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E}}\right)$$

avec :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E}_0} \exp\left[i\left(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}\right)\right]$$

L'avantage de cette notation complexe est que l'on exprime alors les opérateurs de façon très simple car $\dfrac{\partial}{\partial t} = i \omega$ et $\overrightarrow{\nabla} = -i \overrightarrow{k}$.

En effet :

$$\begin{aligned} div\, \underline{\overrightarrow{E}} &= -i \overrightarrow{k} \cdot \underline{\overrightarrow{E}} \\ \overrightarrow{rot}\, \underline{\overrightarrow{E}} &= -i \overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}} \\ \overrightarrow{\Delta}\, \underline{\overrightarrow{E}} &= -k^2\, \underline{\overrightarrow{E}} \\ \frac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} &= i \omega\, \underline{\overrightarrow{E}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Activité 17.1**
Écrire les équations de Maxwell dans une région sans charge ni courant en utilisant l'opérateur $\overrightarrow{\nabla} = -i \overrightarrow{k}$.

	Équations	Avec $\vec{\nabla}$
Maxwell-Gauss (M-G)		
Maxwell-Thomson (M-T)		
Maxwell-Faraday (M-F)		
Maxwell-Ampère (M-A)		

TABLE 17.3 – Équations de Maxwell : opérateur nabla

Les deux premières équations indiquent que $\vec{k}$ et $\underline{\vec{E}}$ d'une part, et $\vec{k}$ et $\underline{\vec{B}}$ d'autre part, sont orthogonaux : les champs électrique $\underline{\vec{E}}$ et magnétique $\underline{\vec{B}}$ sont transversaux.
De plus, l'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{B}}$$

Soit, avec $\vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\,\vec{n}$:

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{n} \wedge \underline{\vec{E}}}{c}}$$

pour une onde plane progressive monochromatique mais cette formule est généralisable au cas des **ondes planes progressives**.

— Remarque très importante —

Si les champs sont exprimés en fonction de $k\,z - \omega\,t$ (et non en fonction de $\omega\,t - k\,z$), alors :

$$\boxed{\vec{\nabla} = i\,\vec{k} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = -i\,\omega}$$

On obtient dans ce cas :

$$div\ \vec{E} = i\,\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$
$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = i\,\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$
$$\vec{\Delta}\ \vec{E} = -k^2\,\underline{\vec{E}}$$
$$\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial t} = i\,\omega\,\underline{\vec{E}}$$

Dans ce cas, les équations de Maxwell donnent :

	Équations	Avec $\vec{\nabla}$
Maxwell-Gauss (M-G)	$div\ \vec{E} = 0$	$i\,\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$
Maxwell-Thomson (M-T)	$div\ \vec{B} = 0$	$i\,\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$
Maxwell-Faraday (M-F)	$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\dfrac{\partial\,\vec{B}}{\partial t}$	$i\,\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = i\,\omega\,\underline{\vec{B}}$
Maxwell-Ampère (M-A)	$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial\,\vec{E}}{\partial t}$	$i\,\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -i\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\omega\,\underline{\vec{E}}$

On obtient évidemment les mêmes résultats !